

Geraden in $\mathbb{R}^2$

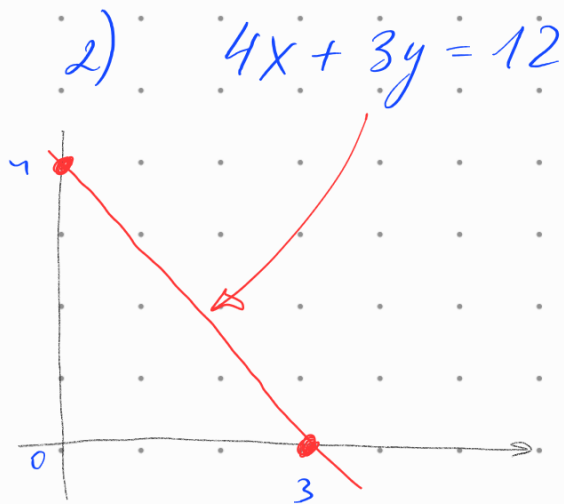
= Lösungsmenge der Gleichung $ax + by = c$
(mit a, b nicht gleichzeitig 0)

Bsp 1) Ist $b \neq 0$ so gilt

$$by = c - ax$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Steigung Schnittpunkt mit y-Achse



Bestimme die Schnittpunkte
mit den Achsen

y-Achse ($x=0$):

$$3y = 12 \Rightarrow y = 4$$

x-Achse ($y=0$):

$$4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

Die Gerade durch zwei Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) hat Gleichung

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$$

Bsp (ohne Formel) $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$

Wir suchen a, b und c , sodass

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 3 = c \\ a \cdot 3 + b \cdot 0 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = c \\ 3a = c \end{cases}$$

$$a = b = \frac{1}{3}c$$

c beliebig

Gleichung der Geraden
durch A und B

wäre $1 \cdot x + 1 \cdot y = 3$
oder $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 1$
oder $3x + 3y = 9$

Bsp Überprüfe, ob drei Punkte auf einer
Geraden liegen.

1) $(2,1)$, $(3,0)$ und $(1,2)$

a) Gerade durch $(2,1)$ und $(3,0)$: $x+y=3$

b) Schau, ob $(1,2)$ auf dieser Geraden liegt:
 $(1,2)$ einsetzen

$$1+2=3 \quad \checkmark$$

2) $(2,2)$, $(0,1)$ und $(-2,0)$
Wir suchen a, b und c mit

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b \cdot 2 = c \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 = c \\ a \cdot (-2) + b \cdot 0 = c \end{cases}$$

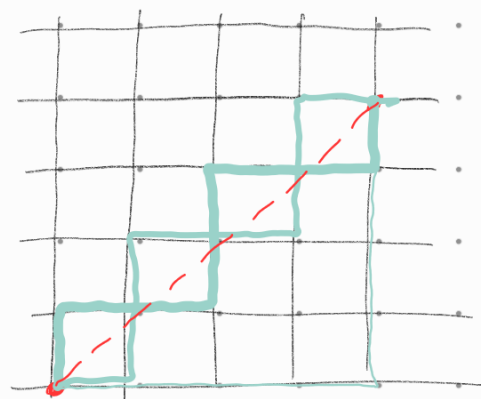
keine Lösungen
 $\Leftrightarrow$ wenn Punkte nicht
auf einer Geraden liegen

► Abstand

$$A = (a_1, a_2) \quad B = (b_1, b_2)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

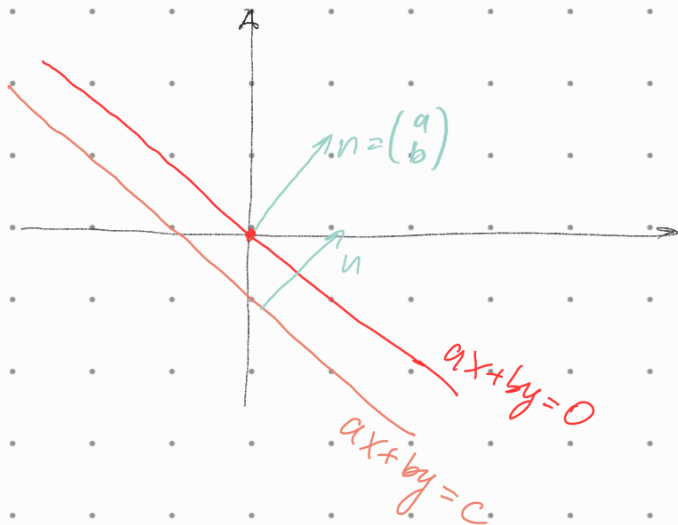
$$\Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{BA}|$$



Manhattan-Metrik

Bsp $A = (2, 1)$, $B = (3, 0)$

$$d(A, B) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



Ein Vektor n , der orthogonal zu der Geraden $ax+by=c$ (Normalenvektor) ist $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$n_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ $n_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal ($n_1 \perp n_2$)

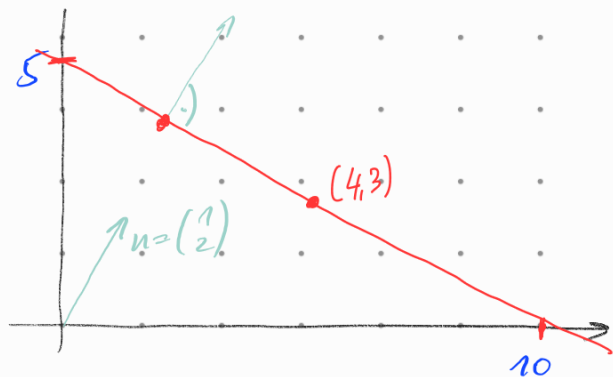
$\Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$
Skalarprodukt

Bsp 1) Gerade mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch $A = (4, 3)$

$G: 1x + 2y = c$ (was ist c ?)

$A \in G: c = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 10$

$\Rightarrow G: x + 2y = 10$



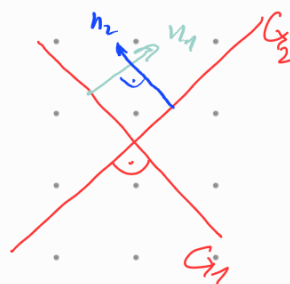
2) Geraden mit Gleichungen

$G_1: x + 2y = 1$

$G_2: 2x - y = 3$

sind orthogonal,

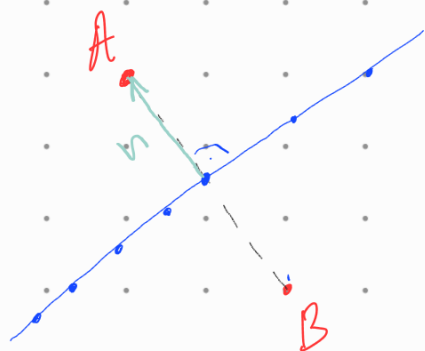
denn $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal



$$1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \quad \Leftrightarrow u_1 \perp u_2$$

Bsp 1) Bestimme die Mittelsenkrechte
von $A = (3, 1)$ und $B = (1, 5)$
(d.h. alle Punkte X , die gleichen Abstand
zu A und B haben)

Sei $X = (x, y)$. $X \in \text{Mittelsenkr.} \Leftrightarrow d(X, A) = d(X, B)$



$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} \quad | \cdot 2$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$$

$$\cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 10y + 25$$

$$-6x + 2x - 2y + 10y = 1 + 25 - 1 - 9$$

$$-4x + 8y = 16 \quad | :4$$

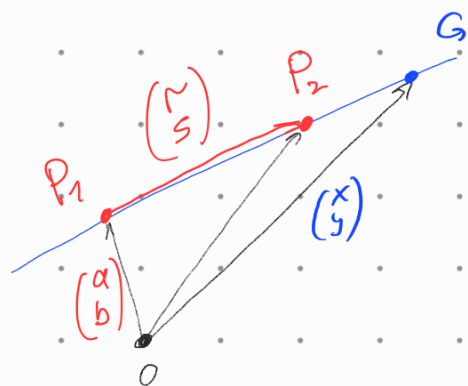
$$M: -x + 2y = 4$$

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2u$$

$$\vec{AB} \parallel u$$

► Parameterdarstellung



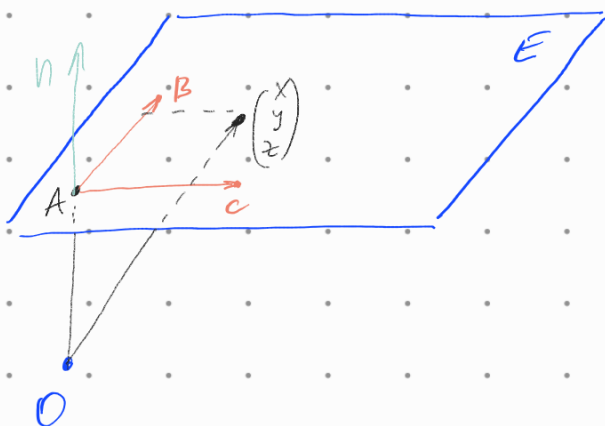
$$G \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Hier } P_1 = (a, b) \quad \text{bzw. } \vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

► Raum $\mathbb{R}^3$

Ebene = Lösungsmenge der Gleichung
 $ax + by + c \cdot z = d$

$n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene



$$E \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + \vec{AB} \cdot s + \vec{AC} \cdot t$$

$t, s \in \mathbb{R}$

Parameterform

Bsp $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$

Wir suchen die Ebene durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}} s + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{AC}} t$$

Was ist die Gleichung von E?

Normalenvektor $u = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

kreuzprodukt

$$\Rightarrow E: 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = d$$

Was ist d? Setze A in die Gleichung ein:

$$A \in E: d = 1$$

$$\Rightarrow E: x = 1 \quad \text{parallel zur } yz\text{-Ebene}$$

Bsp $E_1: x - 2y + 2z = 1$

$$E_2: 2x + y - z = 2$$

Bestimme die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{-2I} \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y = z \end{cases}$$

$$y=z \xrightarrow{\text{in I}} x = 1 + 2y - 2z = 1 + 2y - 2y = 1$$

Lösung $x=1, y=z=t$ beliebig

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Stütz.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}} t$$

sind Ebenen E_1 und E_2 parallel,
so sind $u_1 \parallel u_2 \Leftrightarrow u_2$ ist ein Vielfaches
von u_1